

10 клас

1. Задано п'ять відрізків, з кожних з трьох з яких можна побудувати трикутник. Довести, що хоча б один з цих трикутників буде гострокутним.

Розв'язок. Нехай $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ довжини заданих відрізків. Припустимо, що серед складених трикутників немає жодного гострокутного трикутника тобто $c^2 \geq a^2 + b^2$, $d^2 \geq b^2 + c^2$, $e^2 \geq c^2 + d^2$. Тоді $c^2 + d^2 + e^2 \geq a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2$, Далі

$$\begin{aligned} e^2 &\geq a^2 + 2b^2 + c^2 = (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) \geq \\ &\geq (a^2 + b^2) + 2bc \geq (a^2 + b^2) + 2ab = (a + b)^2. \end{aligned}$$

Але тоді $e \geq a + b$, і побудувати трикутник з цих відрізків неможливо, що суперечить умові задачі. Отже, наше припущення хибне.

2. Нехай $f(x) = x^2 + 6x + 1$ і нехай R — множина точок з координатами (x, y) , які задовольняють нерівності: $f(x) + f(y) \leq 0$ і $f(x) - f(y) \leq 0$. Знайти площу R ?

Розв'язок. З першої умови випливає, що

$$x^2 + 6x + 1 + y^2 + 6y + 1 \leq 0 \implies (x + 3)^2 + (y + 3)^2 \leq 16$$

це круг з центром у $(-3, -3)$ і радіусом 4. З другої умови випливає, що

$$x^2 + 6x + 1 - y^2 - 6y - 1 \leq 0 \implies (x^2 - y^2) + 6(x - y) \leq 0 \implies (x - y)(x + y + 6) \leq 0$$

Таким чином або

$$x - y \geq 0, \quad x + y + 6 \leq 0.$$

або

$$x - y \leq 0, \quad x + y + 6 \geq 0.$$

Кожна з прямих $x - y = 0$ і $x + y + 6 = 0$ проходить через $(-3, -3)$ і має кутовий коефіцієнт 1 або -1 . Тобто наші взаємно перпендикулярні прямі розбивають круг на чотири однакові сектори, два вертикальні з яких складають множину R . Отже, площа R дорівнює половині площі круга, що становить $\frac{1}{2}(\pi \cdot 4^2) = 8\pi$.

Відповідь. 8π .

3. Нехай S_n — сума n перших членів арифметичної прогресії з різницею 2. Частка $\frac{S_{3n}}{S_n}$ не залежить від n . Чому дорівнює S_{20} ?

Розв'язок. Припустимо, що наша послідовність

$$a, a + 2, a + 4, a + 6, a + 8, a + 10, \dots$$

Тоді, оскільки частка $\frac{S_{3n}}{S_n}$ не залежить від n , то, зокрема, $\frac{S_3}{S_1} = \frac{S_6}{S_2}$. Тобто $\frac{3a + 6}{a} = \frac{6a + 30}{2a + 2}$, звідки $\frac{3a + 6}{a} = \frac{3a + 15}{a + 1}$, $3a^2 + 9a + 6 = 3a^2 + 15a$, $a = 1$, і наша послідовність є послідовністю непарних чисел.

Оскільки сума перших n непарних чисел дорівнює n^2 , то $S_{20} = 20^2 = 400$.

Відповідь. 400.

4. Дано гири вагою 995г, 997г, 999г, 1000г, 1010г, 1030г, 1050г. Крім цього є електронна вага, на якій можна визначити точну вагу в грамах будь-якого набору гирьок. Довести, що за допомогою не більше, ніж трьох зважувань можна знайти гирю вагою 1000г.

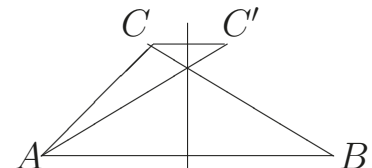
Розв'язок. Візьмемо довільні три гири. Зваживши їх, ми легко можемо встановити, чи є серед них гиря з вагою 1000 грамів. Справді, для того щоб серед трьох гир була гиря з вагою 1000 грамів необхідно і досить, щоб число, що виражає в грамах сумарну вагу, було : або 1) парним і меншим від 3000, або 2) більшим від 3000 і закінчувалося на парну (передостанню) і непарну (останню) цифри.

Тому, за допомогою одного зважування можна встановити, чи є потрібна нам гиря серед вибраних трьох, чи серед чотирьох, які залишилися. Далі, у групі з трьох (чотирьох) гир вибираємо дві довільні і проводимо зважування. Якщо в цій парі є гиря вагою 1000 грамів, то тоді (і тільки тоді) число, що виражає в грамах сумарну вагу, буде закінчуватися на 95, 97, 99, 10, 30, 50. Так ми встановлюємо, чи є потрібна нам гиря у даній парі. Після цього задача зводиться до відшукування потрібної нам гири серед двох (однієї) за допомогою одного зважування.

5. Побудувати трикутник за двома сторонами і різницею протилежних до них кутів.

Розв'язок. *Аналіз.* Нехай $\triangle ABC$ — шуканий.

Проведемо серединний перпендикуляр до сторони AB і знайдемо точку C' , симетричну точці C відносно цього перпендикуляра. Тоді відрізок $AC' = BC$, $\angle C'AB = \angle CBA$, $\angle C'AC$ є заданою різницею кутів, а серединний перпендикуляр до відрізка AB буде серединним



перпендикуляром і до відрізка $C'C$. Задача має єдиний розв'язок, коли задані сторони різні і втрачає сенс, коли вони однакові, бо тоді рівними є і протилежні до них кути.

Побудова. Побудуємо $\triangle C'AC$ за двома заданими сторонами $AC = b$, $AC' = a$ і кутом між ними, що дорівнює заданій різниці кутів. Проведемо серединний перпендикуляр до сторони CC' побудованого трикутника і відобразимо точку A симетрично відносно цього перпендикуляра. Її образ буде шуканою вершиною B трикутника $\triangle ABC$.