

11 клас

1. Нехай x — найменше з більших за 1 чисел таке, що $\sin x = \sin x^2$, де аргументи подано у градусах. До якого цілого числа значення x є найближчим?

Розв'язок. Оскільки $\sin(x) - \sin(x^2) = 2 \sin \frac{x - x^2}{2} \cos \frac{x + x^2}{2}$, то рівність виконуватиметься, коли $x - x^2 = 360n$ або $x + x^2 = 180 + 360n$, де n — довільне ціле. Корені $x = 0$ і $x = 1$ рівняння $x^2 - x = 0$ не задовольняють умову задачі. Рівняння $x^2 - x + 360n = 0$ при натуральному n не має дійсних коренів, а додатний корінь рівняння $x^2 - x - 360 = 0$ (а також $-720, -1080$ і т.д.) більший, ніж додатний корінь рівняння $x^2 + x - 180 = 0$. Оскільки цей корінь лежить праворуч від вершини параболи $y = x^2 + x$ і $12,5^2 + 12,5 = 168,75$ а $13^2 + 13 = 182$, то він лежить між $12,5$ і 13 . Тобто 13 — найближче до нього ціле число.

Відповідь. 13.

2. Розкласти на множники $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$.

Розв'язок. Оскільки даний многочлен дорівнює 0 при $a = b$, то він ділиться на $a - b$. Аналогічно даний многочлен ділиться на $a - c$ і $b - c$. Але добуто $(a - b)(a - c)(b - c)$, як і заданий многочлен, є многочленом 3 степеня з тими самими коренями, тому вони відрізняються між собою лише коефіцієнтом. Тобто

$$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = k(a - b)(a - c)(b - c).$$

Підставивши в Останню рівність $a = 1, b = -1, c = 0$, отримуємо $8 - 1 - 1 = -2k$, звідки $k = -3$. Тому

$$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = -3(a - b)(a - c)(b - c).$$

Відповідь. $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = -3(a - b)(a - c)(b - c)$.

3. Яке значення x задовольняє рівняння

$$\frac{\log_3 x \cdot \log_5 x}{\log_3 x + \log_5 x} = 2?$$

Розв'язок.

$$\frac{2(\log_2 x + \log_3 x)}{\log_2 x \cdot \log_3 x} = 1, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_2 x},$$

$$\log_x 3 + \log_x 2 = \frac{1}{2}, \quad \log_x 6 = \frac{1}{2}, \quad x = 36.$$

Відповідь. 36.

4. Точки M, N, P, Q не лежать в одній площині. Скільки існує різних паралелепіпедів з вершинами у цих точках? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язок. Зафіксуємо дві точки M і N із чотирьох заданих. Вони можуть бути:

- 1) кінцями одного ребра;
- 2) кінцями однієї з діагоналей грані;
- 3) кінцями діагоналі паралелепіпеда.

1) а) Якщо точка P лежить в одній грані з ними, то у цій грані можна побудувати 2 паралелограми, для кожного з яких точка Q може бути кінцем будь-якого ребра (маємо $2 \cdot 4 = 8$ паралелепіпедів).

б) Ні P , ні Q не лежать в одній грані із M і N . Тоді вони лежать на протилежній грані і $PQ \parallel MN$, що суперечить умові (точки не лежать в одній площині).

2) а) Якщо P лежить у одній грані з M і N , то можливі 4 паралелепіпеди з вершинами у цих точках.

б) PQ мимобіжна з MN діагональ іншої грані, тоді такий паралелепіпед єдиний.

в) PQ — ребро паралелепіпеда, що не лежить у одній грані з MN . Тоді таких паралелепіпедів 4.

3) P і Q лежатимуть у одній грані або з M або з N . Грань, що містить три вершини паралелограма можна побудувати трьома способами, при цьому четверта вершина може служити кінцем будь-якого з чотирьох ребер паралелепіпеда (маємо $3 \cdot 4 = 12$ паралелепіпедів).

Таким чином маємо $8 + 4 + 1 + 4 + 12 = 29$ різних паралелепіпедів.

Відповідь. 29.

5. Нехай x, y — додатні числа, а t — найменше з чисел $x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$. Знайти найбільше значення t .

Розв'язок. Нехай $t_{\max} = T$. Тоді $x \geq T, \frac{1}{y} \geq T$, тому $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{T}, y \leq \frac{1}{T}$ і $y + \frac{1}{x} \leq \frac{2}{T}$. Але $y + \frac{1}{x} \geq T$, тобто $T \geq \frac{2}{T}$. Оскільки $T > 0$, то з останньої нерівності випливає, що $T \leq \sqrt{2}$. Але при $x = \sqrt{2}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ значення $t = \sqrt{2}$ досягається. Отже, $t_{\max} = \sqrt{2}$.

Відповідь. $t_{\max} = \sqrt{2}$.