

8 клас

1. Працівник конярської ферми пригнав з ферми на ярмарок кілька коней. Першому покупцеві він продав третину коней і ще $\frac{1}{3}$ коня. Другий покупець купив у коняра дві третини коней, що залишились, і ще $\frac{2}{3}$ коня. А на коні, що у нього залишився, коняр повернувся на ферму. Скільки коней продав коняр?

Розв'язок. Нехай коняр пригнав на ярмарок x коней. Тоді

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3} + 1.$$

Звідси $x = 8$. Отже, коняр продав сім коней.

Відповідь. 7.

2. Є чотири однакові на вигляд монети, одна з яких фальшива (вона відрізняється від решти вагою). За допомогою лише двох зважувань на терезах без тягарців визначити: легша фальшива монета чи важча.

Розв'язок. Кладемо на шальки терезів по дві монети. Далі монети, що були на шальці з більшою вагою ще раз зважуємо на терезах. Якщо при цьому шальки терезів зрівноважаться, то фальшива монета легша від справжніх, якщо ні, то важча.

3. Знайти остачу від ділення числа $2^{2026} + 1$ на 15.

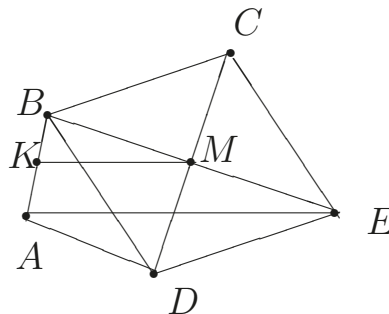
Розв'язок. Випишемо остачі від ділення послідовних степенів числа 2 на 15:

$$\begin{aligned} 2^1 &= 0 \cdot 15 + 2, & 2^2 &= 0 \cdot 15 + 4, & 2^3 &= 0 \cdot 15 + 8, & 2^4 &= 1 \cdot 15 + 1, \\ 2^5 &= 2 \cdot 15 + 2, & 2^6 &= 4 \cdot 15 + 4, & 2^7 &= 8 \cdot 15 + 8, & 2^8 &= 16 \cdot 15 + 1, & 2^9 &= 34 \cdot 15 + 2, \dots \end{aligned}$$

Таким чином остачі від ділення степенів двійки на 15 циклічно повторюються через кожні чотири степені. Але $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, тому остача від ділення 2^{2026} на 15 буде такою ж, як і від ділення 2^2 , тобто 4. Отже, остача від ділення $2^{2026} + 1$ на 15 дорівнюватиме 5.

Відповідь. 5.

4. Точки K і M відповідно середини сторін AB і CD опуклого чотирикутника $ABCD$. Довести, що $KM \leq (AD + BC)/2$.



Розв’язок. Добудуємо $\triangle BCD$ до паралелограма $BCDE$. Тоді $DE = BC$. Точка M буде серединою діагоналі CD , а, отже, й діагоналі BE паралелограма. Тому KM — середня лінія $\triangle ABE$.

Оскільки, $AE \leq AD + DE$ (як відрізок, що сполучає кінці ламаної), то $KM = AE/2 \leq (AD + DE)/2 = (AD + BC)/2$, що й треба було довести.

5. Кілька команд розіграли першість з волейболу, зігравши кожна з кожною по одній грі. Довести, що коли якісь дві команди отримали однакову кількість перемог, то знайдуться такі три команди, що перша виграла у другої, друга — у третьої, а третя — у першої з них. Нагадаємо, що у волейболі не буває нічий.

Розв’язок. Розглянемо дві команди, які мали однакову кількість перемог, і позначимо буквою A ту з них, яка виграла у другої, яку позначимо буквою B . Оскільки B має стільки ж перемог, скільки й A , а команді A вона програла, то знайдеться команда C , у якої команда B виграла, а команда A їй програла (інакше у B було б менше перемог, ніж у A), що і треба було довести.