

9 клас

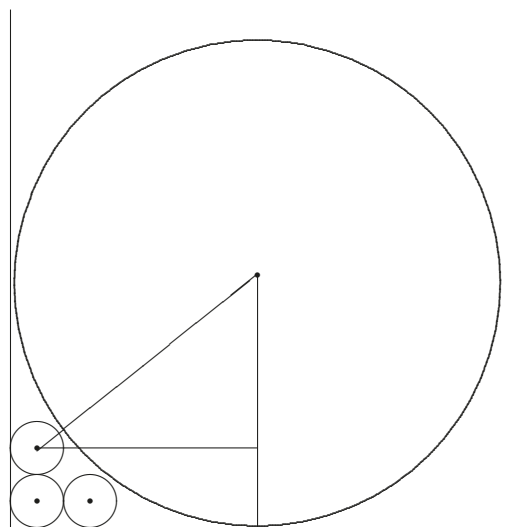
1. Є чотири однакові на вигляд монети, одна з яких фальшива (вона відрізняється від решти вагою). За допомогою лише двох зважувань на терезах без тягарців визначити: легша фальшива монета чи важча. Довести, що при цьому за два зважування, не можна встановити, яка саме це монета. Відповідь обґрунтувати.

Розв'язок. Кладемо на шальки терезів по дві монети. Далі монети, що були на шальці з більшою вагою ще раз зважуємо на терезах. Якщо при цьому шальки терезів зрівноважаться, то фальшива монета легша від справжніх, якщо ні, то важча. Якщо фальшива монета виявиться легшою, то для визначення фальшивої монети потрібно ще одне зважування.

Якщо на шальки терезів покласти по одній монеті і шальки терезів зрівноважаться (обидві монети справжні), то поклавши замість однієї з них одну з тих, що залишились зможемо визначити, котра з монет фальшива. Але якщо нею виявиться монета, що не клалась на терези, то потрібне ще одне зважування, щоб визначити легша вона, чи важча.

2. Три кола радіуса s розміщені у першій чверті площини xOy так що: перше коло дотикається до обох осей, друге дотикається до першого кола і до осі Ox , а третє коло дотикається до першого кола і до осі Oy . Коло радіуса $r > s$ дотикається до обох осей до другого і третього кіл. Знайти r/s .

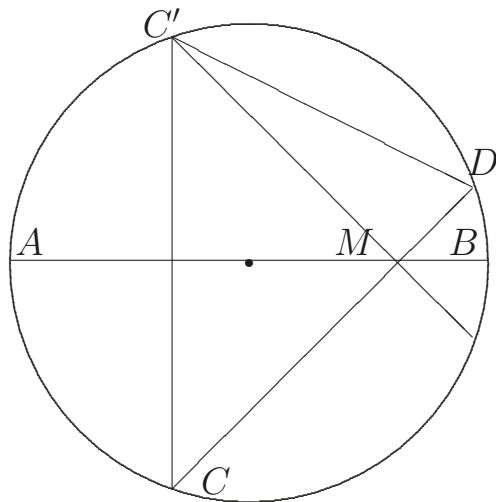
Розв'язок. Не зменшуючи загальності міркувань покладемо $s = 1$, тоді $r/s = r$ і потрібно знайти лише r . Проведемо відрізок між центром третього кола і великим колом. Він має довжину $r + 1$. Потім ми проводимо радіус великого кола, який є перпендикулярним до осі Ox , і перпендикуляр від центра третього кола до цього відрізка. Утворився прямокутний трикутник з катетами $r - 3$, $r - 1$ і гіпотенузою $r + 1$. Тоді $(r - 3)^2 + (r - 1)^2 = (r + 1)^2$, $r^2 - 10r + 9 = 0$, $r = 1$ або $r = 9$. Очевидно, що $r > 1$, тому $r = 9$.



Відповідь. 9.

3. Через точку M на діаметрі кола проведено хорду CD кола, яка утворює

з діаметром кут 45° . Довести, що сума квадратів відрізків CM і MD не залежить від положення точки M .



Розв'язок. Позначимо точку C' симетричну точці C відносно діаметра AB і проведемо хорду через точки C' і M . Вона утворюватиме прямий кут з хордою CD ($45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$). Далі $C'M = CM$ як симетричні відрізки, тому $CM^2 + MD^2 = C'M^2 + MD^2 = C'D^2$. Вписаний у коло $\angle C'CD = 45^\circ$. Тому кутова величина дуги $C'D$ дорівнює 90° і її довжина, а, отже, і довжина хорди $C'D$, яка її стягує, залежить лише від радіуса кола і не залежить від положення точки M .

діуса кола і не залежить від положення точки M .

4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x + y + \{t\} = 2. \end{cases}$$

Тут $\{t\} = t - [t]$ — дробова частина числа t (різниця між числом і його цілою частиною).

Розв'язок. Оскільки $0 \leq \{t\} < 1$, а $x + y = 2 - \{t\}$, то $1 < x + y \leq 2$. Оскільки сума і добуток чисел x і y додатні, то й самі ці числа додатні. З іншого боку, оскільки $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, то $x + y \geq 2\sqrt{x}\sqrt{y} = 2 \cdot 1 = 2$, тому $x + y = 2$, $y = 2 - x$, $x(2 - x) = 1$ і $x = 1$, $y = 1$. Тоді $\{t\} = 0$ і $t = k$ — довільне ціле число.

Відповідь. $(1, 1, k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Знайти всі можливі пари натуральних чисел a і b , такі, що з чотирьох наступних тверджень істинні лише три:

- 1) $a + 1$ ділиться на b ;
- 2) $a = 2b + 5$;
- 3) $a + b$ ділиться на 3;
- 4) $a + 7b$ — просте число.

Розв'язок. Якщо $(a + b) : 3$, то $a + 7b = ((a + b) + 6b) : 3$, тобто $a + 7b$ не буде простим числом. Тобто 3) і 4) твердження не можуть виконуватись одночасно, а, отже, твердження 1) і 2) мусять бути істинними. Але тоді $a + b = 2b + 5 + b = 3b + 5$ не ділиться на 3. Таким чином твердження 3) — хибне, а твердження 1), 2) і 4) — істинні.

Тепер $a + 1 = kb$, де k — натуральне число, $2b + 6 = kb$, $(k - 2)b = 6$ і b має бути дільником 6. Якщо $b = 1$, то $a = 7$, але $a + 7b = 14$ не є простим. Якщо $b = 2$, то $a = 9$, і $a + 7b = 23$ просте число. Якщо $b = 3$, то $a = 11$, але $a + 7b = 32$ не є простим. Якщо $b = 6$, то $a = 17$, і $a + 7b = 59$ — просте.

Відповідь. $(9; 2)$, $(17; 6)$.