## 11 клас

**1.** Нехай $x$ — найменше з більших за 1 чисел таке, що $\sin x = \sin x^2$, де аргументи подано у градусах. До якого цілого числа значення $x$ є найближчим?

**Розв'язок.** Оскільки $\sin(x) - \sin(x^2) = 2\sin\dfrac{x-x^2}{2}\cos\dfrac{x+x^2}{2}$, то рівність виконуватиметься, коли $x-x^2 = 360n$ або $x+x^2 = 180+360n$, де $n$ – довільне ціле. Корені $x = 0$ і $x = 1$ рівняння $x^2-x = 0$ не задовольняють умову задачі. Рівняння $x^2 - x + 360n = 0$ при натуральному $n$ не має дійсних коренів, а додатний корінь рівняння $x^2 - x - 360 = 0$ (а також $-720, -1080$ і т.д.) більший, ніж додатний корінь рівняння $x^2+x-180 = 0$. Оскільки цей корінь лежить праворуч від вершини параболи $y = x^2 + x$ і $12,5^2 + 12,5 = 168,75$ а $13^2 + 13 = 182$, то він лежить між $12,5$ і 13. Тобто 13 — найближче до нього ціле число.

**Відповідь.** 13.

**2.** Розкласти на множники $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$.

**Розв'язок.** Оскільки даний многочлен дорівнює 0 при $a = b$, то він ділиться на $a-b$. Аналогічно даний многочлен ділиться на $a-c$ і $b-c$. Але добуток $(a-b)(a-c)(b-c)$, як і заданий многочлен, є многочленом 3 степеня з тими самими коренями, тому вони відрізняються між собою лише коефіцієнтом. Тобто

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = k(a-b)(a-c)(b-c).$$

Підставивши в останню рівність $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$, отримуємо $8 - 1 - 1 = -2k$, звідки $k = -3$. Тому

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = -3(a-b)(a-c)(b-c).$$

**Відповідь.** $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = -3(a-b)(a-c)(b-c)$.

**3.** Яке значення $x$ задовольняє рівняння

$$\frac{\log_3 x \cdot \log_5 x}{\log_3 x + \log_5 x} = 2?$$

**Розв'язок.**

$$\frac{2(\log_5 x + \log_3 x)}{\log_5 x \cdot \log_3 x} = 1, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_5 x},$$
$$\log_x 3 + \log_x 5 = \frac{1}{2}, \quad \log_x 15 = \frac{1}{2}, \quad x = 225.$$

**Відповідь.** 225.

**4.** Точки $M$, $N$, $P$, $Q$ не лежать в одній площині. Скільки існує різних паралелепіпедів з вершинами у цих точках? Відповідь обґрунтуйте.

**Розв'язок.** Зафіксуємо дві точки $M$ і $N$ із чотирьох заданих. Вони можуть бути:

1) кінцями одного ребра;

2) кінцями однієї з діагоналей грані;

3) кінцями діагоналі паралелепіпеда.

1) а) Якщо точка $P$ лежить в одній грані з ними, то у цій грані можна побудувати 2 паралелограми, для кожного з яких точка $Q$ може бути кінцем будь-якого ребра(маємо $2 \cdot 4 = 8$ паралелепіпедів).

б) Ні $P$, ні $Q$ не лежать в одній грані із $M$ і $N$. Тоді вони лежать на протилежній грані і $PQ \| MN$, що суперечить умові (точки не лежать в одній площині).

2) а) Якщо $P$ лежить у одній грані з $M$ і $N$, то можливі 4 паралелепіпеди з вершинами у цих точках.

б) $PQ$ мимобіжна з $MN$ діагональ іншої грані, тоді такий паралелепіпед єдиний.

в) $PQ$ — ребро паралелепіпеда, що не лежить у одній грані з $MN$. Тоді таких паралелепіпедів 4.

3)$P$, і $Q$ лежатимуть у одній грані або з $M$ або з $N$. Грань, що містить три вершини паралелограма можна побудувати трьома способами, при цьому четверта вершина може служити кінцем будь-якого з чотирьох ребер паралелепіпеда (маємо $3 \cdot 4 = 12$ паралелепіпедів).

Таким чином маємо $8 + 4 + 1 + 4 + 12 = 29$ різних паралелепіпедів.

**Відповідь.** 29.

**5.** Нехай $x$, $y$ — додатні числа, а $t$ — найменше з чисел $x$, $y + \frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$. Знайти найбільше значення $t$.

**Розв'язок.** Нехай $t_{\max} = T$. Тоді $x \geq T$, $\frac{1}{y} \geq T$, тому $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{T}$, $y \leq \frac{1}{T}$ і $y + \frac{1}{x} \leq \frac{2}{T}$. Але $y + \frac{1}{x} \geq T$, тобто $T \geq \frac{2}{T}$. Оскільки $T > 0$, то з останньої нерівності випливає, що $T \leq \sqrt{2}$. Але при $x = \sqrt{2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ значення $t = \sqrt{2}$ досягається. Отже, $t_{\max} = \sqrt{2}$.

**Відповідь.** $t_{\max} = \sqrt{2}$.